XV. Systèmes linéaires - Déterminants

1 Systèmes d'équations linéaires

Définition 1. *On appelle* **système linéaire** *de n équations à p inconnues le système d'équations :*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}u_1 & + & a_{1,2}u_2 & + & \dots & + & a_{1,p}u_p & = & v_1 \\ a_{2,1}u_1 & + & a_{2,2}u_2 & + & \dots & + & a_{2,p}u_p & = & v_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{n,1}u_1 & + & a_{n,2}u_2 & + & \dots & + & a_{n,p}u_p & = & v_n \end{array}\right.$$

Les nombres réels ou complexes $\{u_j\}_{1\leqslant j\leqslant p}$ sont les inconnues du système et les nombres réels ou complexes $\{a_{i,j}, v_i\}_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ les coefficients du système.

Ce système peut s'écrire matriciellement $AU = V$ en posant $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, A est alors appelée **matrice associée** *au système.*

Un système tel que $V = 0$ est dit **homogène**, *le système linéaire $AU = 0$ est appelé* **système linéaire homogène associé** *au système $AU = V$.*

Exercice 1. *Écrire matriciellement les systèmes linéaires :*

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & 2y & = & -1 \\ 3x & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ x & - & 2y & = & 1 \\ 5x & - & y & = & 2 \end{array}\right. \qquad (\mathcal{S}_3) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Définition 2. *On appelle* **solution** *d'un système linéaire $\mathcal{S} : AU = V$ d'inconnue U et de matrice associée A une valeur de U vérifiant l'équation $AU = V$. Résoudre un système linéaire c'est déterminer l'ensemble de ses solutions.*

Exercice 2. *Résoudre les systèmes de l'exercice 1.*

Définition 3. *On appelle* **rang** *d'un système linéaire $\mathcal{S}$ et on note $\mathrm{rg}(\mathcal{S})$ le rang de sa matrice associée.*

Exercice 3. *Déterminer le rang des systèmes de l'exercice 1.*

Propriété 1. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire $\mathcal{S}$ homogène de n équations à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ de dimension $p - \mathrm{rg}(\mathcal{S})$.*

Démonstration. Exigible - On utilise le théorème du rang. □

Exercice 4. *Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes linéaires homogènes associés aux systèmes de l'exercice 1.*

Propriété 2. *On considère un système linéaire $\mathcal{S}$ ainsi que son système linéaire homogène associé $\mathcal{S}_H$. Si $\tilde{U}$ est une solution particulière de $\mathcal{S}$ alors les solutions de $\mathcal{S}$ sont de la forme $U = \tilde{U} + U_H$ avec U_H solution de $\mathcal{S}_H$.*

Démonstration. Exigible. □

Exercice 5. *Vérifier la propriété pour les systèmes de l'exercice 1.*

2 Systèmes de Cramer

Définition 4. *On appelle* **système de Cramer** *un sytème linéaire de n équations à n inconnues tel que* $\mathrm{rg}(\mathcal{S}) = n$.

Exercice 6. *Montrer que* $(\mathcal{S}_4) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & - & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = & 6 \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \end{array}\right.$ *est un système de Cramer.*

Remarque 1. *Si un système de Cramer admet une solution alors celle-ci est unique.*

Exercice 7. *On considère le système linéaire* $(\mathcal{S}_4)$ *de l'exercice 6.*

1. *Effectuer successivement les opérations sur les lignes :* $L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 + 8L_2$.
2. *Résoudre le système triangulaire obtenu.*

Remarque 2. *Lorsque l'on n'utilise que des opérations sur les lignes du type* $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, *la méthode de résolution précédente porte le nom de* **méthode du pivot de Gauss**.

Exercice 8. *Résoudre le système linéaire* $(\mathcal{S}_5) : \left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 2x & - & 5y & & & = & -3 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$ *par la méthode du pivot de Gauss.*

Propriété 3. Formules de Cramer en dimension 2

Un système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & a_2y & = & \alpha \\ b_1x & + & b_2y & = & \beta \end{array}\right.$ *tel que* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ *admet une unique solution :*

$$\left\{ x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & a_2 \\ \beta & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ b_1 & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \right\}$$

Démonstration. Exigible. □

Propriété 4. Formules de Cramer en dimension 3

Un système linéaire $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1x & + & a_2y & + & a_3z & = & \alpha \\ b_1x & + & b_2y & + & b_3z & = & \beta \\ c_1x & + & c_2y & + & c_3z & = & \gamma \end{array}\right.$ *tel que* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ *admet une unique solution :*

$$\left\{ x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \alpha & a_3 \\ b_1 & \beta & b_3 \\ c_1 & \gamma & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}, z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}} \right\}$$

Démonstration. Au programme de deuxième année. □

Exercice 9. *Résoudre le sytème* $(\mathcal{S}_6) : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$ *à l'aide des formules de Cramer.*

3 Déterminants d'ordre 2 et 3

Définition 5. Déterminant d'une matrice

- *On appelle* **déterminant** *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

- *On appelle* **déterminant** *d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix}$$

Exercice 10. *Calculer le déterminant de la matrice* $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

Propriété 5. *On considère* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = 2$ *ou* 3, *alors :*

- $\det(I_n) = 1$,
- $\det({}^tA) = \det(A)$,
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,
- A *est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ *et alors* $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration. Exigible (seulement dans le cas $n = 2$ pour le produit). □

Exercice 11. *On considère* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = 2$ *ou* 3 *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *exprimer* $\det(\lambda A)$ *en fonction de* $\det(A)$.

Corollaire 1. *On considère* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *avec* $n = 2$ *ou* 3, *alors* $\det(A) = \det(P^{-1}AP)$.

Démonstration. Exigible. □

Remarque 3. *Le déterminant ne dépend pas de la base considérée.*

Définition 6. Déterminant d'un endomorphisme

On considère un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* 2 *ou* 3. *On appelle* **déterminant** *d'un endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et on note* $\det(f)$, *le déterminant de sa matrice dans une base quelconque de* E.

Exercice 12. *Calculer le déterminant d'une rotation du plan ou de l'espace.*

Propriété 6. *On considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* 2 *ou* 3, $f, g \in \mathcal{L}(E)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, *alors :*

- $\det(Id_E) = 1$,
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$,
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$,
- f *est bijectif si et seulement si* $\det(f) \neq 0$ *et alors* $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Démonstration. Exigible. □

Définition 7. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension 2 ou 3 muni d'une base $\mathcal{B}$.*

- *Si $n = 2$, on définit le* **déterminant** *de deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ par :*

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

- *Si $n = 3$, on définit le* **déterminant** *de trois vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$ par :*

$$\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$$

Remarque 4. *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cette définition correspond au déterminant d'une famille de vecteurs si la base $\mathcal{B}$ est orthonormale directe.*

Exercice 13. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n = 2$ ou 3 muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on considère une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs et on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{F})$.*

Propriété 7. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n = 2$ ou 3 muni d'une base $\mathcal{B}$ alors une famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.*

Démonstration. Exigible - On remarque que $\mathcal{F}$ est une base si et seulement si la matrice des coordonnées de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$ est de rang n donc inversible. □

Exercice 14. *On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, montrer en utilisant un déterminant que $\left\{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 15. *On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n = 2$ ou 3 muni de deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Donner une relation entre $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$.*

Définition 8. *Deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ du plan ou de l'espace sont dites de même* **orientation** *si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ et d'orientations contraires si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.*

Exercice 16. *L'espace étant muni d'une base directe, montrer que $\left\{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une base et déterminer son orientation.*